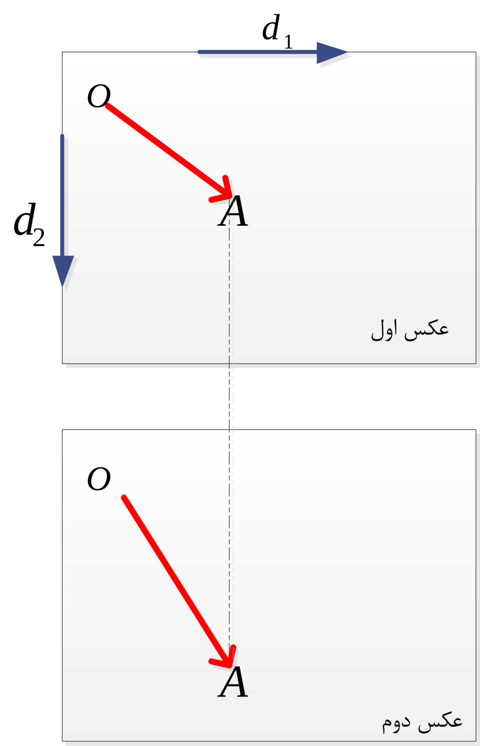
جلسه هشتم

همانطور که در جلسه‌ی گذشته بیان شد، اگرچه تغییرات را نسبت به زمان بررسی می‌کنیم ولی باید توجه داشته باشیم که این تغییرات از دید چه ناظر یا دستگاهی رخ می‌دهد. به عبارت دیگر تغییرات بردار جابجایی باید با دو قید ذکر شود؛ یکی اینکه نسبت به زمان است و دیگری اینکه از دید چه دستگاهی است. در صورتی که این اصل آسان را رعایت نکنیم پی در پی دچار اشتباهاتی می‌شویم. دلیل این قاعده هم مشخص است؛ چرا که برای مشخص نمودن بردار جابجایی نیز باید دستگاه خاصی مشخص می‌کردیم.

برای مثال در یکی از تمرین‌ها از شما خواسته شده بود که از جسمی که در حال سقوط آزاد است فیلم‌برداری کنید یا عکس‌های متوالی بگیرید. فرض کنید نام این جسم در حال سقوط که فرضاً می‌تواند یک توپ باشد را A بنهیم. همچنین در تمامی عکس‌ها نقطه‌ی مشخصه‌ی دیگری مانند گوشه‌ای از دیوار وجود داشته باشد و آن را O بنامیم. بردار جابجایی که تغییرات آن نسبت به زمان برایمان مهم است را OA در نظر بگیرید. این بردار در هر عکس از دید دستگاه حساسه یا CCD دوربین تغییر می‌کند(مطابق شکل زیر). بنابراین می‌توان گفت تغییرات بردار OA نسبت به زمان و از دید دستگاه حساسه‌ی دوربین مدنظر ما می‌باشد.



با توجه به شکل فوق به عنوان مثال می‌توانیم بردار جابجایی را به صورت زیر بیان کنیم:

$$
{}^{d}r_{OA}=\begin{pmatrix}2\\ b(t)\\ 0\end{pmatrix}
$$

منظور از بالانویس dدر این بیان دستگاه دوربین یا حساسه‌ی دوربین است(در شکل، دو محور این دستگاه با نام‌های d_1 و d_2 نشان داده شده است). مولفه‌ی سوم این بردار به دلیل اینکه بردار OA مولفه‌ای در راستای عمود بر محورهای d_1و d_2 یا محور سوم دستگاه d ندارد همواره صفر در نظر گرفته شده است و به دلیل اینکه مسیر حرکت سقوط آزاد در راستای محور دوم دستگاه دوربین است مولفه‌ی اول بردار مقداری ثابت در نظر گرفته شده است. ولی مولفه‌ی دوم این بردار که در هر عکس در حال تغییر است به صورت متغیر با زمان و به صورت $b(t)$ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که بدون مشخص نمودن دستگاه d نمی‌توان در مورد تغییراتِ بردار OA با زمان بحث کرد چراکه همین بردار از دید دستگاهی که نسبت به دستگاه دوربین در حالِ دوران باشد تغییراتش طور دیگری به نظر خواهد رسید.

از این پس توجه کنید که وقتی می‌گوییم «سرعت» یک بردار یعنی تغییر آن بردار نسبت به زمان. اگر گفته می‌شود سرعت بردار مشخصی را پیدا کنید، در پاسخ باید گفت این سوال، سوال اشتباهی است و باید از پرسش‌کننده بپرسید : سرعت این بردار را از دید چه دستگاهی می‌خواهد؟. برای مثال قبل، سرعت بردار از دید دستگاه دوربین به صورت زیر می‌باشد:

$$
{}^{d}v_{OA}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{db(t)}{dt}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dot{b}(t)\\ 0\end{pmatrix}
$$

که در آن ${}^{d}v_{OA}$ سرعت بردار OAاز دید دستگاه dمی‌باشد. ولی همین سرعت از دید دوربینی که نسبت به این دوربین در حال دوران است، قطعاً چیز دیگری خواهد شد چراکه دوربین دوم این بردار را ضمناً در حال دوران خواهد دید!

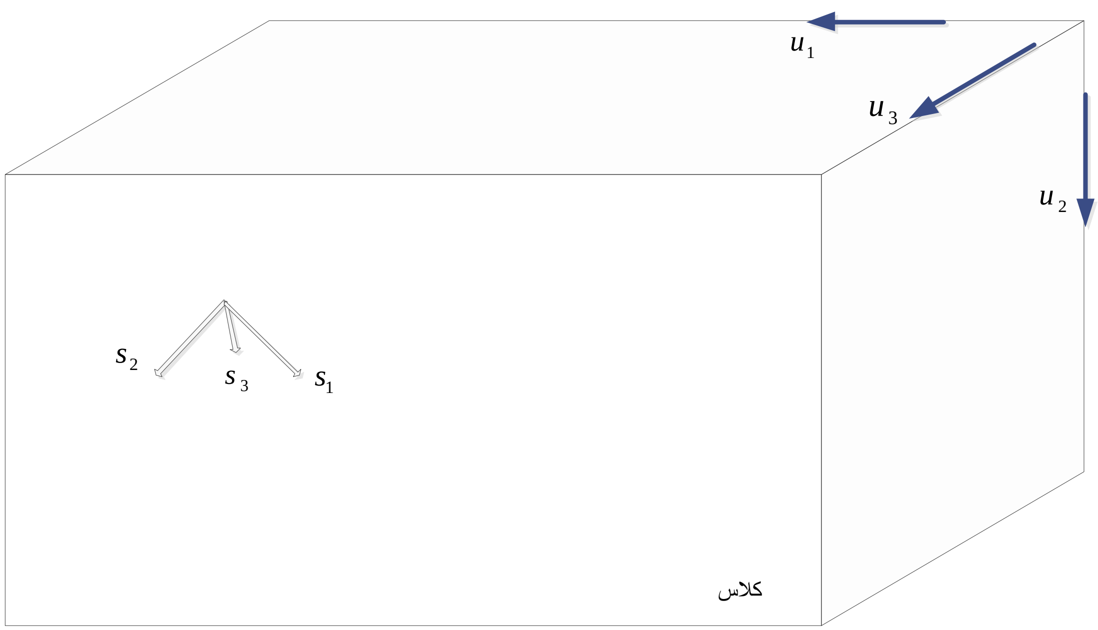
بنابراین **هر جا موضوع سرعتِ بردار مطرح شد باید بپرسید از دید چه دستگاهی.**

به این ترتیب معلوم می‌شود که بین سرعت‌ها از دید دستگاه‌های مختلف، می‌تواند اختلافی وجود داشته باشد و احتمالاً نیز وجود دارد. ولی چگونه با دانستن سرعت از دید یک دستگاه مشخص، می‌توانیم آن را از دید دستگاه مشخص دیگری بدست آوریم؟ به عنوان نمونه در مثالی که آورده شد، اگر فرض کنیم $b(t)$ را اندازه گرفته

باشیم، آن‌گاه $\dot{b}(t)$ را از دید دستگاه دوربین داریم. حال چگونه سرعت بردار OA را از دید دستگاه دیگری مثلاً همان دوربین دوم ، بدست آوریم؟ برای پاسخ به این سوال لازم است مقدماتی در ادامه بیان شود.

ابتدا می‌پردازیم به تغییر یک دستگاه نسبت به دستگاه دیگر. تغییر یک دستگاه از دید دستگاه دیگر نسبت به زمان، چیزی نیست جز تغییر سه بردار پایه‌ی آن دستگاه از دید دستگاه دیگر. تنها باید به این نکته توجه کنید که این سه بردار پایه از دید هر دو دستگاه یکه هستند و طولشان تغییر نمی‌کند.

دستگاه گوشه‌ی اتاق و دستگاه دیگری که با سه قلم ساخته و در دستتان نسبت به اتاق ثابت نگه داشته‌اید را درنظر بگیرید(مطابق شکل). این دو دستگاه نسبت به زمان نسبت به یکدیگر ثابت هستند و می‌توانند با یک دورانِ ثابت بر هم منطبق شوند. اما اگر دستگاه سه قلمی که در دستتان قرار دارد با حرکت دستتان تغییر وضعیت دهد، نسبت به زمان از دید دستگاه گوشه‌ی اتاق در حال تغییر است. چگونه می‌توانیم تغییر این دستگاه سه قلمی نسبت به زمان را از دید دستگاه گوشه‌ی اتاق بیان نماییم؟



فرض کنید u دستگاه گوشه‌ی کلاس و s دستگاهی است که نسبت به زمان از دید دستگاه گوشه‌ی کلاس در حال تغییر است (فرض کنید دستگاه s همان دستگاه سه قلمی است که با حرکت دستتان نسبت به دستگاه گوشه‌ی کلاس تغییر وضعیت می‌دهد). اگر ${}^u_sC(t)$ که شامل ۹ عنصر متغیر با زمان است را در طی زمان بدانیم، قاعدتاً باید بتوانیم تغییر این دو دستگاه u و s نسبت به زمان را نسبت به یکدیگر بیان کنیم.

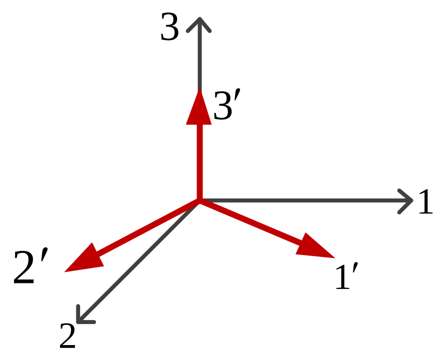
$${}^u_sC(t) = \begin{pmatrix} {}^u\underline{s}_1(t) & {}^u\underline{s}_2(t) & {}^u\underline{s}_3(t) \end{pmatrix}$$

یعنی اگر با استفاده از همان ۹ عنصر، ${}^{u}_{s}\dot{C}(t)$ را بدست آوریم،

$${}^{u}_{s}\dot{C}(t)=\begin{pmatrix}{}^{u}\underline{\dot{s}}_1 & {}^{u}\underline{\dot{s}}_2 & {}^{u}\underline{\dot{s}}_3\end{pmatrix}$$

باید فرقِ بین سرعت‌هایی که دو دستگاه از تغییرات یک بردار برداشت می‌کنند، درونِ ${}^{u}_{s}\dot{C}(t)$ باشد.

حال در ادامه می‌خواهیم چیزی را پیش بکشیم که سرعت بین دو دستگاه را به نحوی مستقیم بیان کند. فرض کنید دستگاهِ u ، عکسهایی از دستگاهِ s در لحظات t و $t+\Delta t$ گرفته است که در آن وضعیت دستگاه s تغییر نموده است. سه راستای این دستگاه در لحظه‌ی t ، 1، 2 و 3 هستند و در لحظه‌ی $t+\Delta t$ به صورت $1'$ ، $2'$ و $3'$ هستند.



با استفاده از محور دوران بین دو دستگاه در زمان‌های t و $t+\Delta t$ (یا همان محور دوران بین $(1,1')$، $(2,2')$ و $(3,3')$) می‌توانیم تغییرات دستگاه در طی گذشت زمان Δt را بررسی نماییم. این محور دوران می‌تواند بیان‌کننده‌ی سرعت دستگاه در دو لحظه نسبت به دستگاه گوشه‌ی کلاس u باشد. به این دلیل که اولاً یک محور است و ثانیاً زاویه‌ی دوران لازم برای اینکه 1 را به $1'$، 2 را به $2'$ و 3 را به $3'$ ببرد یک زاویه‌ی راستگرد مشترک است. (تعریف جهت راستگرد زاویه دوران به این صورت است که اگر انگشت شستِ دست راستتان در جهت محور دوران قرار گیرد آن‌گاه حرکت انگشتانِ دیگر جهت مثبت زاویه‌ی دوران را تعیین می‌کند).

اگر K بردار دوران بین دستگاه در دو لحظه و از دید دستگاه گوشه‌ی کلاس(u) باشد و $\Delta\theta$ نیز همان زاویه‌ی مشترک باشد سرعتِ دوران، برداری به صورت زیر است:

$$\frac{\underline{K}\Delta\theta}{\Delta t}=\underline{K}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\underline{K}\dot{\theta}=\omega_{us}$$

توجه داشته باشید که در این رابطه، $\underline{K}$ برداری با سه عنصر و اندازه‌ی واحد است و $\dot{\theta}$ یک عدد است. اندازه‌ی $\dot{\theta}$ همان کندی یا تندی دوران دستگاه s را نشان می‌دهد و K جهت این دوران را. که هر دو در درونِ ω_{us} به عنوان سرعت دورانی دستگاه s نسبت به u شناخته می‌شوند. در هر لحظه هم $\dot{\theta}$و هم $\underline{K}$ می‌توانند از لحاظ مقداری یا برداری تغییر کنند. به همین دلیل ω_{us}در هر لحظه می‌تواند خود نیز تغییر کند یا بهتر است بنویسیم $\omega_{us}(t)$. در مثالی که بیان شد $\underline{K}$ را بین دو لحظه‌ی t و $t+\Delta t$ ثابت درنظرگرفتیم. هر چه Δt کوچک شود، $\underline{K}$را در همان Δt کوچک‌تر پیدا می‌کنید.

حال برگردیم به پیش‌تر، می‌دانیم که دستگاه‌ها نسبت به هم یک C دارند که می‌تواند نسبت به زمان تغییر کند و اگر $\omega_{us}(t)$ صفر باشد آن گاه انتظار داریم ${}^{s}_{u}\dot{C}(t)$ نیز صفر باشد.

به همین ترتیب می‌توان براحتی توجه کرد که اگر سرعت دورانی دو دستگاه نسبت به دستگاه سومی یکسان باشد، آن‌گاه آن دو دستگاه نسبت به هم سرعت دورانی ندارند.

لازم است که به اشتباه نیفتاده و دقت داشته باشید که بین دو دستگاه sو u در زمان t بردار دورانی وجود دارد و همین‌طور بین sو u در زمان $t+\Delta t$ نیز بردار دورانی وجود دارد، اما ω_{us}در راستای K که بردارِ دورانی خود s بین دو لحظه‌ی t و $t+\Delta t$ (از دید دستگاه u است و هیچ لزومی ندارد که با هیچ‌یک از آن دو بردار دوران بین s و u یکی باشد. در حقیقت بردار دوران بین sو u که می‌تواند در هر لحظه در حال تغییر باشد، خود نیز از روی ω_{us} قابل به دست آوردن است.

ضمناً دقت شود که همواره می‌توان سرعت زاویه‌ای که از سرعت بین دو دستگاه شکل گرفته است را در هر دستگاهی بیان نمود. به عنوان مثال ${}^{u}\omega_{us}$ یا ${}^{s}\omega_{us}$ یا ${}^{p}\omega_{us}$ (p هر دستگاه دلخواهی است).

اگر چه تعبیر $\dot{C}$ تعبیر بدی نیست ولی مانند ω درک خوبی از سرعت بین دو دستگاه، به ما نمی‌دهد. و همچنین دقت کنید که در ωسه عدد داریم ولی در $\dot{C}$ ۹ عدد. البته بین این سه در ωو آن ۹ تا در $\dot{C}$ باید رابطه‌ای وجود داشته باشد. اما این رابطه به چه صورت است؟

این یعنی رابطه‌ی ${}^{u}_{s}\dot{C}(t)$ یا ${}^{u}\dot{s}_1(t)$ با $\omega_{su}(t)$به چه صورت است؟

در پاسخ به این سوال باید توجه داشته باشید که ${}^{u}\dot{s}_1(t)$ همان $\Delta s_1(t)$می‌باشد وقتی Δt را بسیار کوچک درنظر بگیرید.

مطابق با شکل آیا می‌توانید روابط زیر را تأیید نمایید؟

$$ {}^{u}\dot{\underline{s}}_{1,2,3}(t) = \omega_{su}(t) \times {}^{u}\underline{s}_{1,2,3}(t) $$

و با توجه به آن داریم:

$$ {}^{u}_{s}\dot{C}(t) = {}^{u}\omega_{su}(t) \times {}^{u}_{s}C(t) $$

مطابق این رابطه با دانستن ω و $\underline{s}(t)$ها در لحظه‌ی t می‌توان دریافت $\underline{s}(t)$ها در لحظه‌ی $t+\Delta t$ چه تغییری کرده‌اند. دلیل اینکه در رابطه‌ی فوق ضرب خارجی وجود دارد این است که تغییرات Δs به سینوس زاویه‌ی بین $\underline{K}$و s_1(یا s_2 یا s_3) بستگی دارد و فرضاً وقتی هیچ تغییری در هر یک رخ ندهد درحالیکه زاویه دوران صفر نیست، پس سینوس آن صفر بوده و لذا تغییری نداریم. در مثال خاصی که در شکل قبل می‌توانید مشاهده کنید به دلیل موازی بودن $\underline{K}$ و s_3، Δs_3صفر می‌باشد.

تا این‌جا مقدماتی بیان نمودیم تا به سوال ابتدای جلسه یعنی رابطه‌ی سرعت بردار از دید دستگاه‌های مختلف پاسخ دهیم. در ادامه سعی داریم تا این رابطه با استفاده از ω بدست آید. همانطور که می‌دانیم روابط زیر برقرار است:

$$ {}^{s}\dot{\underline{r}}_{OA} = {}^{s}\underline{v}_{OA} $$
$$ {}^{u}\dot{\underline{r}}_{OA} = {}^{u}\underline{v}_{OA} $$

همچنین با داشتن بیان یک بردار در یک دستگاه و ماتریس تبدیل بین دو دستگاه در هر لحظه، می‌توان بردار را در هر لحظه در دستگاهِ دیگر نیز بیان نمود.

$$ {}^{u}\underline{r}_{OA}(t) = {}^{u}_{s}C(t)\ {}^{s}\underline{r}_{OA}(t) $$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی فوق نسبت به زمان داریم:

$$ \boxed{{}^{u}\dot{\underline{r}}_{OA} = {}^{u}_{s}\dot{C}\ {}^{s}\underline{r}_{OA} + {}^{u}_{s}C\ {}^{s}\dot{\underline{r}}_{OA}} $$

این رابطهٔ بین سرعت‌ها از دید دو دستگاه است ولی بیان شده در هر یک. لذا رابطه‌ای است وابسته به بیان‌ها در دستگاه‌ها!!! . اصطلاحاً رابطه‌ای است بین اعدادی که در بیان‌ها داریم و نه رابطه‌ای برداری که مستقل از بیان بردارها در دستگاه‌ها باشد!

ولی بآسانی با استفاده از رابطهٔ بین ${}^{u}_{s}\dot{C}(t)$ و $\omega_{su}(t)$ ، و جاگذاری‌های مناسب می‌توانید به رابطه‌ای مستقل از اینکه بردارها در کدام دستگاه بیان بشوند، به دست آورید. ان شاءالله در جلسه بعد با هم نیز خواهیم دید.